# 重調和方程式の境界問題の解の正値性について (マルコフ過程に対するlateral condition)



清水, 昭信

数理解析研究所講究録
57巻 1968年 123-133



# 重調和方程式の境界問題の解の正値性について

東京教育大学 理 清水昭信

## §1. 序

重調和方程式の境界問題の解の正値性について Hadamard, Duffin, Garabedian, Aronszajn & Smith 等の研究がある。 Duffin, Garabedian は ある特殊の境界問題について Green 函数の正値性が くずれることを示した。 Aronszajn & Smith [1] は、次の2つの type の境界問題の Green 函数の正値性について考察した。

D は $n$ 次元 Euclid 空間 $R^n$ の有界領域であり、D の境界 $\partial D$ は十分なめらかであるとする。 $\Delta$ は Laplacian を表わし、$\Delta^2$ は、$\Delta$ を2回 operate する作用素とする。 こうして、

問題 I：

$$\Delta^2 u(x) = f(x) \qquad x \in D$$

$$u(\xi) = 0 \qquad \xi \in \partial D$$

$$-c\frac{\partial u}{\partial n} + \Delta u(\xi) = 0 \qquad \xi \in \partial D$$

121

問題 II.　$\Delta^2 u(x) = f(x) \qquad x \in D$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) + b\, u(\xi) = 0 \qquad \xi \in \partial D$$

$$d\, u(\xi) + \left(\frac{\partial}{\partial n} + b\right)\Delta u(\xi) = 0 \qquad \xi \in \partial D.$$

ここで，$n$ は $\partial D$ における内向きの方線であり，$b, c, d$ は $\partial D$ 上で定義された，十分なめらかな函数である。

Aronszajn & Smith は，ある条件の下で存在の保証される問題 I，問題 II の Green 函数が Pseudo-reproducing kernel となることに注意して，reproducing kernel の正値性を考察する問題に帰着している。reproducing kernel についての一般論は Aronszajn & Smith によって良く調べられているが，問題 I，問題 II の Green 函数の正値性の考察という具体的問題に，reproducing kernel の一般論をあてはめることは，そう簡単ではない。問題 I，問題 II のもつ特殊性をうまく使っている。なによりも，この方法では，問題 I，問題 II からきまる $L^2(D)$ 上の operator が self-adjoint であることが基本的である。

ここでは，上記問題 II を更に一般化した問題[1)]の解の正値性をしらべる。その際，reproducing kernel についての理論と独立に，空間 $C(\partial D)$ 上の semi-group の理論を用いて考察する。問題 I についても，全く同じ方法で

1) 必ずしも self-adjont でない問題

考察出来る。問題の formulation は Aronszajn と Smith[1] と全く異っているため，得られる結果を厳密に比較することは困難であるが，Rough にみれば ほぼ対応する結果が得られているとみなせる。

## §2 問題の formulation と結果

$D$ は，$n$ 次元 Euclid 空間 $R^n$ の中の有界領域であり $\partial D$ は有限個の連結成分から成り その各々の成分は，$C^3$ 級の $(n-1)$ 次元 hypersurface であるとする。$C(\bar{D})$（又は $C(\partial D)$）は，$\bar{D}$（又は $\partial D$）上の連続函数の空間であり，norm は uniform norm とする。$C^2(\bar{D})$ 上の operator $\Delta$ (Laplacian) の $C(\bar{D})$ における最小閉拡張を $\bar{\Delta}$ とかくことにする。又，定数 $\alpha \geq 0$ に対して $G_\alpha^{min} f$ $(f \in C(\bar{D}))$ を次の式を満す函数として定義する。

$$(\alpha - \bar{\Delta})\, u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \bar{D},$$
$$u(\xi) = 0 \quad , \quad \xi \in \partial D.$$

又，定数 $\alpha \geq 0$ と $\varphi \in C(\partial D)$ に対して $H_\alpha \varphi$ を次の式をみたす $C(\bar{D})$ に属する函数として定義する。

$$(\alpha - \bar{\Delta})\, u(x) = 0 \quad , \quad x \in \bar{D},$$
$$u(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial D.$$

「Wentzell type の operator」とは，K. Sato & T. Ueno [2]

の§4で定義された integro-differential operator を指す。ただし [2] §4の条件 (L.1) と (L.2) はみたされるとする。さて、L が Wentzell type の operator であるとしよう。operator $LG_\alpha^{min}$ は $\mathbb{C}(\overline{D})$ から $\mathbb{C}(\partial D)$ への positive bounded operator へ一意的に拡張出来る。[2; Lemma 4.2]。拡張された operator を $\overline{LG_\alpha^{min}}$ で表わす。更に operator $\overline{LH_\alpha}$ は、$LH_\alpha$ の $\mathbb{C}(\partial D)$ における最小閉拡張とする [2; Corollary to Lemma 4.1]。$\mathcal{D}(\overline{\Delta})$ (又は $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$) は operator $\overline{\Delta}$ (又は $\overline{LH_\alpha}$) の domain とし, $[u]_{\partial D}$ は函数 $u \in \mathbb{C}(\overline{D})$ の $\partial D$ への restriction とする。$\mathcal{D}(\hat{L}) = \{ u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta})\ ;\ [u]_{\partial D} \in \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha}) \}$。ここで $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$ は $\alpha$ に依存しない。このとき $\mathcal{D}(\hat{L}) =$
$\{ u = G_\alpha^{min} f + H_\alpha g\ ;\ f \in \mathbb{C}(\overline{D}),\ g \in \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha}) \}$ となる。$\mathcal{D}(\hat{L})$ 上に operator $\hat{L}$ を次の式で定義しよう。

$$\hat{L} u = \overline{LG_\alpha^{min}} f + \overline{LH_\alpha} g \quad , \text{ for } u = G_\alpha^{min} f + H_\alpha g$$

この定義は Well-defined である。

$L_1$ と B は, Wentzell type の operator とし, $d$ は $\partial D$ 上の連続函数としよう。我々は次のような biharmonic equation の境界問題を研究する。

(1.1) $\quad u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta}^2) \cap \mathcal{D}(\hat{L}_1) \cap \mathcal{D}(\hat{L}_2)$

(1.2) $\quad \overline{\Delta}^2 u\ (x) = f(x)\ , \quad x \in \overline{D}.$

(1.3) $\hat{L}_1 u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D,$

(1.4) $\hat{L}_2 u(\xi) = d(\xi) u(\xi) - \hat{B} \overline{\Delta} u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D.$

ここで，$\mathcal{D}(\overline{\Delta}^2) = \{u;\ u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta})\ \&\ \overline{\Delta} u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta})\}$であり，$\mathcal{D}(\hat{L}_2) = \{u;\ u \in \mathcal{D}(\overline{\Delta})\ \&\ \overline{\Delta} u \in \mathcal{D}(\hat{B})\}$である。任意の$f \in C(\overline{D})$に対して，(1.1)〜(1.4)をみたす解$u$が一意的に存在するとき，$f$を$u$へ移すmappingを この境界問題のGreen operatorという。それを$\mathbb{G}$であらわす。

次の定理1において，次の2つの仮定をおく。

仮定I. 方程式 $-\overline{L_1 H_0}\varphi = \psi$ は 任意の$\psi \in C(\partial D)$に対して unique solution $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{L_1 H_0})$をもつ。更に，ある正の定数$\lambda$が存在し，次の命題が成りたつ。即ち 任意の$\psi \in C(\partial D)$に対して 方程式 $(\lambda I - \overline{BH_0})\varphi = \psi$ は unique solution $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{BH_0})$をもつ。 ここで$I$は恒等作用素である。

注意： 仮定Iのもとで，$\overline{L_1 H_0}$と$\overline{BH_0}$は，$C(\partial D)$上のpositive contraction strongly continuous semigroupのinfinitesimal generatorになっている[2; Corollary to Theorem 5.1].

仮定Ⅰのもとで，次の境界問題の Green operator の存在が分っている。

$$-\overline{\Delta}\, u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \overline{D},$$
$$\widehat{L}_1 u(\xi) = 0 \quad , \quad \xi \in \partial D.$$

この Green operator を $G_0^{\widehat{L}_1}$ であらわす。 次に，新たに integro-differential operator を導入しよう。 $\widetilde{L}$ と $\widetilde{L}_\lambda$ を 次の式で定義する。

$$\widetilde{L} u = \widehat{L}_2 G_0^{\widehat{L}_1} u$$
$$\widetilde{L}_\lambda u = \widetilde{L}_\lambda u + \lambda [u]_{\partial D}$$
$$\mathcal{D}(\widetilde{L}) = \mathcal{D}(\widetilde{L}_\lambda) = \{u \,;\, G_0^{\widehat{L}_1} u \in \mathcal{D}(\widehat{L}_2)\}.$$

注意： operator $\widetilde{L}$ は次の形で表わされる。

$$\widetilde{L} = d(\xi)\,(-\overline{L_1 H_0})^{-1}\, \overline{L_1 G_0^{min}} + \widehat{B}.$$

更に， $\mathcal{D}(\widetilde{L}) = \mathcal{D}(\widehat{B})$ となる。

仮定Ⅱ positive constant λ が存在して次の命題が成りたつ。 $f \in \mathcal{D}(\widetilde{L} H_0)$ が $\eta \in \partial D$ で positive maximum をとれば， $\widetilde{L}_\lambda H_0 f(\eta) \leqq 0$ である。

定理1. 仮定Ⅰ，仮定Ⅱ のもとで，次の命題が成りたつ。

(i) $\widetilde{L} H_0$ は，$C(\partial D)$ 上のある positive contraction strongly

continuous semigroup の generator であり，
$-\hat{L}H_0$ の range は $\mathbb{C}(\partial D)$ に等しく，$-\hat{L}H_0$ は
有界，正値の逆作用素をもつ。
(ii) $\mathbb{C}(\bar{D})$の任意の函数 $f$ に対して，(1.1)〜(1.4)をみたす
解が一意的に存在し，解は次の式で表現される。

(1.5) $\quad u = \mathbb{G}f = G_0^{\hat{L}_1} G_0^{\hat{L}} f$

ここで $G_0^{\hat{L}}$ は次の式で与えられる。

(1.6) $\quad G_0^{\hat{L}} f = G_0^{min} f + H_0(-\hat{L}H_0)^{-1}\hat{L}G_0^{min} f$

(iii) 函数 $d$ が $\partial D$ 上で nonnegative ならば，operators
$G_0^{\hat{L}}$ と $\mathbb{G}$ は positive である。

次に，$L_1$, $L_2$ として特殊な形のものを与え，仮定I，仮定IIがともに満足されるための十分条件をもとめよう。
(1.3)，(1.4)の代りに，次の(1.3′)，(1.4′)を採用する。

(1.3′) $\quad \hat{L}_1 u(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial n} u(\xi) - (b(\xi)+\mu)\, u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D.$

(1.4′) $\quad \hat{L}_2 u(\xi) \equiv d(\xi)\, u(\xi) - \hat{L}_1 \Delta u(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial D.$

ここで，$b$ と $d$ は $\partial D$ 上の連続函数であり，$\mu$ は定数，$\frac{\partial}{\partial n}$ は $\partial D$ における内向きの方線に沿った微分をあらわす。更に，$\mathbb{C}(\partial D)$ 上の bounded operator である $\frac{\partial}{\partial n} G_0^{min} H_0$ の operator norm を $m$ であらわし，$\|d\| = \sup_{\xi} |d(\xi)|$ とする。
定理1を用いて，次の定理2を得る。

定理2. $b, d$ が nonnegative function であり, $\mu > 0$, $\mu^2 > m\|d\|$ であるならば, (1.1) (1.2) (1.3′) (1.4′) をみたす解が一意的に存在し, Green operator $\mathfrak{G}$ は positive である。

注意. $\mathbb{C}(\bar{D})$ (又は $\mathbb{C}(\partial D)$) 上の operator が nonnegative function を nonnegative function へ移すとき, その operator は positive であるという.

§3. 定理1, 定理2の証明.

[定理1の証明] 先ずいくつかの Lemma を証明する。

Lemma 1. $\tilde{L}H_0$ は $\mathbb{C}(\partial D)$ 上のある positive contraction strongly continuous semigroup の generator であり, $-\tilde{L}H_0$ の range は, $\mathbb{C}(\partial D)$ に等しく, $-\tilde{L}H_0$ は bounded positive inverse をもつ。

(証明). 任意の $f \in \mathcal{D}(\tilde{L}H_0)$ に対して, $\tilde{L}_\lambda H_0 f = \tilde{L}H_0 f + \lambda f$, $\tilde{L}H_0 = d(\xi)(-\overline{L_1 H_0})^{-1}\overline{L_1 G_0^{min}} + \overline{BH_0}$ であるから,

$$\tilde{L}_\lambda H_0 = \overline{BH_0} + d(\xi)(-\overline{L_1 H_0})^{-1}\overline{L_1 G_0^{min}} + \lambda I.$$

である。仮定Iより, $\overline{BH_0}$ は generator である。

$d(\xi)(-\overline{L_1 H_0})^{-1}\overline{L_1 G_0^{min}} + \lambda I$ は bounded operator であり, 仮定IIより, ある $\lambda$ に対して $\tilde{L}_\lambda H_0$ が generator

になることが分る。（2； Corollary to Theorem 1.2）

さて，今，$-\hat{L}H_0 = \lambda I - \hat{L}_\lambda H_0$ であるから，結局，

$-\hat{L}H_0$ は，generator であり，$-\hat{L}H_0$ の range は $\mathbb{C}(\partial D)$ であり，

$-\hat{L}H_0$ が bounded positive inverse をもつことが分る。

次の2つの Lemma は，容易に証明出来る。

Lemma 2　$u \in \mathbb{C}(\bar{D})$ が (1.1)〜(1.4) をみたすならば，$v = \Delta u$ は，次の性質をもつ。

(2.1)　$u = G_0^{\hat{L}_1} v$

(2.2)　$v \in \mathcal{D}(\Delta)$ and $-\Delta v = f$

(2.3)　$v \in \mathcal{D}(\hat{L})$ and $\hat{L}v(\xi) = 0$, $\xi \in \partial D$.

逆に，$v \in \mathbb{C}(\bar{D})$ が (2.2)(2.3) をみたすならば，(2.1) で定義される $u$ は，(1.1)〜(1.4) をみたす。

Lemma 3.　(2.2), (2.3) をみたす解は一意的に存在し，次の式で与えられる。

(2.4)　$v = G_0^{min} f + H_0 (-\hat{L}H_0)^{-1} \hat{L} G_0^{min} f$

Lemma 2 と Lemma 3 から，(1.1)〜(1.4) をみたす解が一意的に存在し，次の式で与えられることが分る。

$u = G_0^{\hat{L}_1} G_0^{\hat{L}} f$ ，ここで $G_0^{\hat{L}} f = G_0^{min} f + H_0(-\hat{L}H_0)^{-1}\hat{L}G_0^{min} f$.

次に $d(\xi) \geqq 0$ としよう。

$$\widetilde{L}\,G_0^{min} = d(\xi)(-\overline{L_1 H})^{-1}\overline{L_1 G_0^{min}} + \overline{B G_0^{min}}$$

であるから，$\widetilde{L}\,G_0^{min}$ は，positive であることが分る。従って (1.5)，(1.6) より，$G_0^{\widetilde{L}}$ と $G$ が positive になる。

〔定理2の証明〕 境界条件 (1.3′)，(1.4′) は，それぞれ (1.3)，(1.4) の特別の場合である。$b(\xi) \geqq 0$，$d(\xi) \geqq 0$，$\mu > 0$，$\mu^2 > m\|d\|$ としよう。定理1によって，仮定Ⅰと仮定Ⅱがみたされることを示せば，十分である。仮定Ⅰが $b(\xi) \geqq 0$，$\mu > 0$ のとき，みたされることは，明らかである。さて，

$$\widetilde{L}H_0\varphi = \overline{\frac{\partial}{\partial n}H_0}\varphi - b\varphi + \left\{ d\left(\mu - \overline{\left(\tfrac{\partial}{\partial n} - b\right)H_0}\right)^{-1}\overline{\frac{\partial}{\partial n}G_0^{min}}H_0\varphi - \mu\varphi \right\}$$

である。$K = d\left(\mu - \overline{\left(\frac{\partial}{\partial n} - b\right)H_0}\right)^{-1}\overline{\frac{\partial}{\partial n}G_0^{min}}H_0$ とおく。

$K$ は $C(\partial D)$ 上の bounded positive operator であり，$\|K\| \leqq \|d\| \cdot \frac{m}{\mu}$ である。$\lambda$ を $0 < \lambda < \mu - \frac{m\|d\|}{\mu}$ となるようにとる。$f \in \mathcal{D}(\widetilde{L}H_0)$ が $x \in \partial D$ で positive maximum をとったとしよう。

$$Kf(\xi) \leqq f(x)\,K1(\xi) \leqq \frac{m}{\mu}\|d\|\,f(x) \quad ,(^{\forall}\xi \in \partial D)$$

であるから，

$$\widetilde{L}_\lambda H f(x) = \overline{\frac{\partial}{\partial n}H}f(x) - b(x)f(x) + \{Kf(x) - (\mu-\lambda)f(x)\}$$
$$\leqq \left\{\frac{m}{\mu}\|d\| - (\mu-\lambda)\right\}f(x) \leqq 0$$

従って. 仮定Ⅱがみたされることが分った。

## References

[1] N. Aronszajn and K.T. Smith, "Characterization of positive reproducing kernels. Applications to Green's functions." Amer. J. Math, Vol 79, 1957, PP. 611—622.

[2] K. Sato and T. Ueno, "Multi-dimensional diffusion and the Markov processes on the boundary." J. Math. Kyoto Univ., Vol 4, NO.3, 1965, PP. 529-605.

[3] A. D. Wentzell, "On the lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes." Teor. Veroyat. Primen., Vol 4, 1959, PP. 172-185.

[4] A. Shimizu, "Boundary value problems for the biharmonic equation and Markov processes on the boundary." to appear